(נשתמש בפורמליזם מאלגברה לינארית בעיקר בשיעורים הראשונים)

Vector Spaces

מרחב החיצים (dart space) $\mathbb{R}^{E\times\{\pm1\}}$

מרחב הקדקדים (vertex space) $\mathbb{R}^{V}$

מרחב הקשתות (arc space) - תת מרחב המכיל את הווקטורים האנטי-סימטריים תחת rev של מרחב החיצים.

$$\{\alpha : \forall d \ \ \alpha[d] = -\alpha[rev(d)]\}$$

$$\eta(d)[d'] = \begin{cases} 1 & d' = d \\ -1 & d' = rev(d) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

בסיס סטנדרטי של מרחב הקשתות:

$$\{\eta((a,+1)) : a \in A\}$$

$$\eta(S) = \sum_{d \in S} \eta(d)$$

$$\eta(v) = \sum_{d:\, head(d) = v} \eta(d)$$

מרחב החתכים:

$$\vec{\delta}_G(S) = \{d : tail(d) \in S,\ head(d) \notin S\}$$

מרחב החתכים הוא המרחב הנפרש ע״ $\{\eta(\vec{\delta}_G(S)) : S \subset V\}$

יהיו $K_1, \dots, K_{\kappa(G)}$ הרכיבים הקשירים של G.

יהיו $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{\kappa(G)}$ קדקדים נציגים מכל K_i.

נראה ש - $CUT_G = \{\eta(\vec{\delta}_G(v)) : v \in V \setminus \{v_1, \dots v_{\kappa(G)}\}\}$ הוא בסיס של מרחב החתכים.

אינדוקציה:

<u>למה</u> - הוקטורים של CUT_G בת"ל. $\Leftarrow$ $\dim(\mathrm{span}(CUT)) = |CUT|$

<u>הוכחה</u>: יהי $\psi=\sum_v \psi_v \eta(v)$ צירוף לינארי לא טריוויאלי של וקטורים ב- CUT. נראה ש- ψ אינו וקטור האפס.
יהי H תת הגרף של G המושרה ע"י קדקודים ע $\psi_v \neq 0$.
יהי K רכיב קשיר של H. K הוא תת-גרף (ממש) של רכיב כלשהו K' של G משום ש K אינו מכיל את הנציג $\hat{v}_i$ של K' ($\psi_{\hat{v}_i}=0$).
לכן, קיימת קשת uv שלה בדיוק קצה אחד ב- K.
בה"כ $u\in K$. v אינו שייך לרכיב אחר של H, אחרת u ו v באותו רכיב. נובע ש $v\notin H$, כלומר $\psi_v=0$. לכן $\psi[uv]\neq 0$.
$\square$

<u>מרחב המעגלים</u> – תת המרחב של מרחב הקשתות הניצב למרחב החתכים:
$$\{\theta : \theta\in \text{Arc space},\ \theta\cdot\eta(v)=0\ \ \forall v\in V\}$$

יהי F יער פורש של G. לכל $e\notin F$ יהי C_e המעגל הבסיסי של e ביחס ל- F. נגדיר $\beta_F(e)=\eta(C_e)$.
נראה שהוקטורים $CYC_F=\{\beta_F(e) : e\in E\setminus F\}$ הם בסיס של מרחב המעגלים.

<u>למה</u>: הוקטורים של CYC_F בת"ל. $\Leftarrow$ $\dim(\mathrm{span}(CYC_F))=|CYC_F|$

לכל $e\in E-F$, $\beta(e)$ הוא הוקטור היחיד עבורו הקואורדינטה המתאימה לחיצים של e אינה אפס. לכן $\beta(e)$ אינו יכול להכתב כצירוף לינארי של שאר הוקטורים ב- CYC_F. $\square$

למה - אם W מסלול סגור אז $\eta(W)$ שייך למרחב המעגלים.

הוכחה: יהי $v \in V$. לכל חץ $d \in W$ עם $head(d)=v$, החץ העוקב d' ב-W מקיים $tail(d')=v$. ולהיפך, אם $tail(d)=v$ אז החץ הקודם d' מקיים $head(d')=v$. מכאן שמספר היציאות ב-W v ראשים שווה למספר הכניסות ב-W שנכנסים ל-v. לכן

$$\eta(v)\cdot\eta(W) = 2\left|\{d\in W : head(d)=v\}\right| - 2\left|\{d\in W : tail(d)=v\}\right| = 0$$

□

תולדה: $\dim(span(CYC_F)) \le \dim($ מרחב המעגלים $)$

למה: CUT הוא בסיס של מרחב החתכים.
CYC הוא בסיס של מרחב המעגלים.

הוכחה: מימד מרחב החתכים הוא לפחות $\dim(span(CUT))$
כלומר $x+|CUT| = x+|V|-\kappa(G)$ עבור שלם אי שלילי x.
מימד מרחב המעגלים הוא לפחות $\dim(span(CYC_F))$
כלומר $y+|CYC_F| = y+|E|-|F|$

מימד מרחב הקשתות $|E|$ הוא סכום מימדי תת המרחבים הניצבים אלו:

$$\begin{aligned}|E| &= x+|V|-\kappa(G)+y+|E|-|F| \\ &= x+|V|-\kappa(G)+y+|E|-(|V|-\kappa(G)) \\ &= x+y+|E|\end{aligned}$$

כלומר $x=y=0$ ומכאן ש-CUT הוא בסיס למרחב החתכים
ו CYC בסיס למרחב הקשתות.

□

אינטואיציה:
$\eta(v)$ במרחב החתכים
$\eta(f)$ הוא מסלול סגור

Cut-Cycle duality

<u>למה</u> - יהי G גרף מישורי. v קדקד של G ו- f קדקד של G^*.

$$\eta(v)\cdot\eta(f)=0$$

<u>הוכחה</u>: תהי D^+ קבוצת החיצים של f שראשם v
תהי D^- " " " " שזנבם v

$$\eta(v)\cdot\eta(f)=2|D^+|-2|D^-|$$

כעת, אם $d\in D^+$ אז $\pi^*(d)=rev\circ\pi(d)$ כלומר $\pi^*(d)\in D^-$
אם $d\in D^-$ אז $\pi^{*-1}(d)\in D^+$
כלומר, $|D^+|=|D^-|$ $\square$

<u>משפט</u> (דואליות של מרחב החתכים ומרחב המעגלים):
מרחב החתכים של G^* הוא מרחב המעגלים של G.

<u>הוכחה</u>: נהנ"כ G קשיר. בסיס למרחב החתכים של G הוא:

$$\{\eta(v): v\in V\setminus v_\infty\}$$

בסיס למרחב החתכים של G^* הוא

$$\{\eta(f): f\in V(G^*)-f_\infty\}$$

מהלמה הקודמת, הוקטורים במרחבים אלו אורתוגונליים אחד לשני.
לכן מרחב החתכים של G^* הוא תת-מרחב של מרחב המעגלים של G.
מספר הוקטורים בבסיס למרחב החתכים של G^* הוא

$$|\phi|-1 = m-n+2-1=|E|-(|V|-1)$$

כלומר, זהה למימד מרחב המעגלים של G, מכאן שהמרחבים זהים
$\square$

Interdigitating Trees

יהי F יער פורש. תהי $e\in F$. יהי k הרכיב הקשיר של F שמכיל את e. יהיו K_1 ו K_2 הרכיבים הקשירים המתקבלים מ-K כשמוחקים את e, כאשר $tail(e)\in K_1$.
קבוצת החוצים שיש להם קצה ב-K_1 וקצה ב-K_2 נקראת החתך הבסיסי של e ביחס ל-F.

<u>למה</u>: $\{\eta(\text{החתך הבסיסי של } e \text{ ביחס ל-} F) : e\in F\}$ היא בסיס למרחב החתכים

הוכחה: ברור ששייכים למרחב החתכים. הוקטורים בקבוצה בת"ל כי לכל $e\in F$ החוצים של e נמצאים בדיוק בוקטור אחד בקבוצה. מספר הוקטורים הוא $|V(G)|-\kappa(G)$, כלומר כמימד מרחב החתכים. □

<u>למה</u> - יהי G גרף מישורי קשיר. יהי T עץ פורש של G.
כל מעגל ב-G^* כולל קשת של T.

<u>הוכחה</u> - יהי C^* מעגל ב-G^*. מכיוון ש $\eta(C^*)$ במרחב המעגלים של G^* הוא במרחב החתכים של G. לכן ניתן לכתוב אותו כצירוף לינארי:

$$\eta(C^*)=\sum_{e\in T}\alpha_e\,\eta(\text{החתך הבסיסי של } e)$$

מכיוון שבצד שמאל אינו אפס, קיימת לפחות קשת אחת $\hat e\in T$ עבורה $\alpha_{\hat e}\neq 0$. מכיוון ש-$\hat e$ מופיעה רק בחתך הבסיסי של $\hat e$, המקדם של החוצים של $\hat e$ ב-$\eta(C^*)$ שונה מאפס, כלומר $\hat e\in C^*$. □

<u>מסקנה</u> - הקשתות של G שאינן ב-T מהוות עץ פורש T^* של G^*.
<u>הוכחה</u>: מספר הקשתות שאינן ב-T הוא $|E|-|V|+1=|V(G^*)|-1$
הקשתות אינן יוצרות מעגל ב-G^* לפי הלמה הקודמת. □

Simple cut-cycle duality

למה - יהי G גרף מישורי, T עץ פורש, $\hat{e} \in T$.
קבוצת החיצים של החתך הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T ב-G שווה(?)
לקבוצת החיצים של המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T^* ב-G^*.

הוכחה: יהי C^* המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T^* ב-G^*.
נכתוב את $\eta(C^*)$ בבסיס של מרחב החתכים של G

$$\eta(C^*) = \sum_{e \in T} \alpha_e \, \eta(\text{חתך בסיסי של } e)$$

לכל $e \in T$, אם $\alpha_e \neq 0$ אז $\eta(C^*)$ איננו אפס על החיצים של e.
אבל הקשת היחידה של C^* ב-T היא $\hat{e}$. לכן

$$\eta(C^*) = \alpha_{\hat{e}} \, \eta(\text{חתך בסיסי של } \hat{e})$$

כיוון שהחץ $(\hat{e}, 1)$ מופיע עם מקדם $+1$ גם ב-C^* וגם ב-$\eta(\text{חתך בסיסי של } \hat{e})$
נובע ש $\alpha_{\hat{e}} = 1$! $\eta(C^*) = \eta(\text{חתך בסיסי של } \hat{e})$

□

משפט - קבוצת חיצים מהווה מעגל פשוט ב-G^* אמ"מ היא מהווה חתך פשוט ב-G.

הוכחה: ⇐ יהי C^* מעגל פשוט ב-G^*, תהי $\hat{e}$ קשת של C^*, ונכתוב $C^* = P^* \circ \hat{e}$. יהי T^* עץ פורש של G^* שמכיל את P^*.
C^* הוא המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T^*, ולפי הלמה הקודמת החיצים של C^* מהווים את החתך הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T, שהוא חתך פשוט.

⇒ תהי S_1 קבוצת קדקודים של G כך ש $\vec{\delta}_G(S_1)$ הוא חתך פשוט.
תהי $S_2 = V(G) - S_1$. יהיו T_i עצים הפורשים בבין(?) את S_i.
תהי $e \in \delta(S_1)$ ויהי $T = T_1 \cup T_2 \cup \{e\}$. אז $\vec{\delta}_G(S_1)$ הוא חתך בסיסי ביחס ל-T, ולכן מעגל בסיסי (ולכן פשוט) ב-G^*. □

Separators

מפריד (Separator) בגרף הוא קבוצה של קדקדים או קשתות שמחיקתם מפרידה את הגרף לשני חלקים. ספרטורים משמשים כבסיס לאלגוריתמי divide-and-conquer:

- מצא מפריד בגרף
- מצא רקורסיבית פתרון לבעיה בכל אחד מהחלקים
- השתמש בפתרונות החלקים כדי למצוא/להרכיב פתרון לגרף כולו.

על מנת שהגישה הזו תעבוד, יש צורך להשיג שתי תכונות עיקריות של הספרטור:

① איזון - אף אחד מהחלקים אינו קטן מדי (אחרת הרקורסיה אינה חוסכת דבר)

② ספרטור קטן - אחרת קשה בדר"כ לתפור פתרון לגרף כולו מהפתרונות הרקורסיביים.

משקל מוצמד → קדקדים / קשתות / פאות $\qquad \sum w = 1$

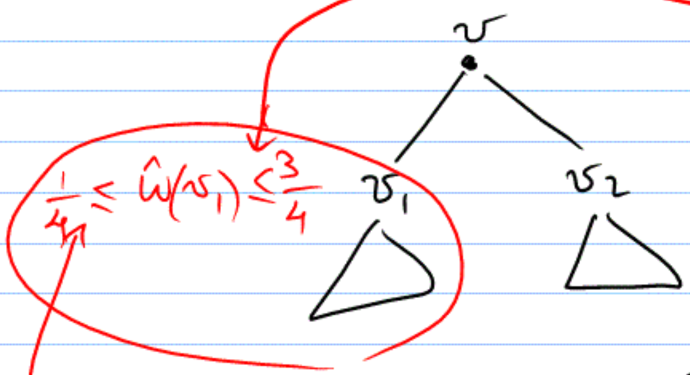
איזון - כל אחד משני החלקים שוקל, נגיד, לכל היותר $\frac{3}{4}$.

<u>משפט</u> - יהי T עץ מדרגה ≤ 3 עם משקולות לקדקודים כך שכל קדקוד שוקל לכל היותר $\frac{1}{4}$. ניתן למצוא בזמן לינארי קשת $\hat{e}$ כך שכל רכיב של $T-\hat{e}$ שוקל לכל היותר $\frac{3}{4}$.

<u>הוכחה</u> - בחר קדקוד מדרגה 1 כשורש. נגדיר לכל קדקוד v

$$\hat{\omega}(v) = \sum \{\omega(u) : u \text{ צאצא של } v\}$$

יהי v קדקוד כך ש $\hat{\omega}(v) > \frac{3}{4}$, אבל לכל צאצא u של v $\hat{\omega}(u) \leq \frac{3}{4}$.



בה"כ $\hat{\omega}(v_1) \geq \hat{\omega}(v_2)$. לכן

$$\hat{\omega}(v_1) \geq \frac{1}{2}\left(\hat{\omega}(v) - \underbrace{\omega(v)}_{\omega(v) \leq \frac{1}{4}}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

כלומר, הקשת vv_1 מפרידה את הגרף לשני חלקים שמשקל כל אחד מהם לכל היותר $\frac{3}{4}$. □

(קבוצת קשתות שמגדירה מעגל קודקודים **מפריד α-מאוזן** אם גם תת-הגרף המוקף (ממש) ע"י המעגל, וגם זה שאינו מוקף ע"י המעגל שוקלים לכל היותר α.

Fundamental Cycle Separator

<u>משפט</u> - יהי G גרף מישורי עם משקולות $w(f)$ לפאות, כך שמשקל כל פאה לכל היותר $\frac{1}{4}$, וכן שגודל כל פאה לכל היותר 3. יהי T עץ פורש של G. קיימת קשת $\hat{e}$ שאינה ב-T כך שהמעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T הוא מפריד מעגלי $\frac{3}{4}$-מאוזן.

<u>הוכחה</u>: יהי T^* העץ הדואלי ל-T. דרגתו של T^* לכל היותר 3, וקדקודיו של T^* הן פאות של G, כך שמשקל כל פאה הוא לכל היותר $\frac{w}{4}$.
תהי $\hat{e}$ המפריד של T^* מהמשפט הקודם.
החתך הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T^* הוא חתך פשוט ($T^*-\hat{e}$ מורכב משני עצים שמפרישים את שני תתי הגרפים המופרדים ע"י החתך). מהדואליות של חתכים ומעגלים, המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T הוא מעגל פשוט שמפריד בין $\frac{1}{4}$ ל $\frac{3}{4}$ מהמשקל.

□