למה - העץ T הוא עץ מרחקים קצרים ביותר לאורך כל ריצת האלגוריתם.

הוכחה - נראה הטענה בכל שלב בין שני פיבוטים מיוחדים באינדוקציה על הצעדים של האלגוריתם. לבסיס עלינו להראות ש-T הוא עץ מרחקים קצרים מיד אחרי הפיבוט הנוכחי שמכניס ל-T_i את הקשת $d = v_{i+1}v_i$ ואחרי שמשנים את אורכו של d להיות $-c_0$ (להזכירכם, c_0 הוא המרחק מ-v_i ל-v_{i+1})

נניח בשלילה כי קיים קדקד u עבורו $dist(v_{i+1},u)$ קטן מהמרחק $dist_T(v_{i+1},u)$
u אינו צאצא של v_{i+1} ב-T_i כי אחרת T_i אינו עץ מרחקים קצרים.
לכן המסלול מ-v_{i+1} ל-u ב-T מתחיל בקשת d וממשיך במסלול מ-v_i ל-u ב-T_i.
כלומר: $dist_T(v_{i+1},u) = length(d) + dist(v_i,u)$

אבל הנחנו

$$dist(v_{i+1},u) < dist_T(v_{i+1},u) = -dist(v_i,v_{i+1}) + dist(v_i,u)$$

כלומר אי שוויון המשולש למרחקים קצרים מופר

$$dist(v_i,v_{i+1}) + dist(v_{i+1},u) < dist(v_i,u)$$

בסתירה.

צעד האינדוקציה: נניח ש-T עץ מרחקים קצרים, ונראה שהוא כזה גם אחרי פיבוט.
מכיוון ש-T עץ מרחקים קצרים, העודפים של כל החיצים שאינם ב-T אינם שליליים.
האלגוריתם מגדיל את אורכו של d עד שהעודף של חץ כלשהו d' הופך להיות אפס.
כעת פיבוט שמכניס את d' ל-T לא ישנה את היותו של T עץ מרחקים קצרים משום שהעודף של d' הוא אפס.

□

כיצד משתמשים ב- MSSP

- מסלולים קצרים ביותר.

נתבונן בצומת v. לכל חץ d שראשו v, יש קבוצה רציפה של שורשים (קדקדים של f_∞) עבורם d נמצא בעץ המסלולים הקצרים.

כלומר, החצים של v מחלקים את הקדקדים של f_∞ לאינטרוולים רציפים. נשמור לכל קדקד v ייצוג של האינטרוולים הללו. בהינתן קדקד v ושורש r, הייצוג מחזיר את החץ d של v שהאינטרוול שלו מכיל את r.
כלומר, אנו יודעים מהו החץ האחרון במסלול קצר ביותר מ- r ל- v.
בצורה זו ניתן לשחזר המסלול כולו. כמה זמן זה יקח?
אם היינו משתמשים בעץ בינארי רגיל לייצוג האינטרוולים הללו, כל שאילתא היתה לוקחת $O(\log|f_\infty|) = O(\log n)$. מכיוון שהאינטרוולים הם של שלמים שגדולים לכל היותר $|f_\infty|<n$, ניתן לעשות זאת בזמן $O(\log\log n)$
[Van Emde Boas 77, Melhorn & Naher 90]
הזמן לשחזור מסלול באורך l יהיה $O(l \log\log n)$.

- מרחקים

אם נתונה לנו רשימה של k זוגות (r_j, v_j), כאשר $v_j \in V$, $r_j \in f_\infty$, ניתן לקבל את המרחקים בין הזוגות תוך כדי ריצת האלגוריתם.
לשם כך צריך לייצג גם את העץ T בעץ דינאמי שתומך ב Link, Cut, הוספה קבועה לכל הצאצאים של קדקד, ושאילתת מרחק של קדקד.
כאשר מקבלים את T_i, שואלים מהם המרחקים לכל הקדקדים בזוגות בהם r_j הוא השורש של T_i.
הזמן: $O(n \log n)$ להרצת MSSP ועוד $O(k \log n)$ לעבור k שאילתות לעץ הדינאמי של T.

באופן כללי יותר, ניתן להשתמש בטכניקה של persistence למשל [Driscoll, Sarnak, Sleator, Tarjan 89]

כדי לשמור את ההיסטוריה של האלגוריתם בצורה "נגישה".
סיבוכיות העבודה עולה ל- $O(n\log n)$, אבל אז אפשר לגשת לכל
צומת בהיסטוריה של האלגוריתם ב- $O(\log n)$ זמן. כך שבאופן מעשי
ניתן לקבל כל מרחק משורש לכל קדקד ב- $O(\log n)$ זמן (amortized).

הערות:

- ניתן לממש האלגוריתם ללא dynamic trees, בזמן פרופורציונלי לסכום המשקולות בגרף.
  למשל - בגרף לא ממושקל, זמן הריצה לינארי.
- קיים חסם תחתון של $\Omega(n\log n)$ ל- MSSP

טיפול במרחקים מנוונים -

נגדיר קריטריון לבחירת הצלע עם עודף מינימלי במקרה שיש יותר מאחד.
בחר את הצלע הקרוב ביותר לעלה של T^* (leafmost).

ניתן להוכיח ששימוש בקריטריון זה מבטיח שכל צלע נכנס לעץ T לכל היותר פעם אחת במהלך הרצת האלגוריתם.

(נשתמש בפורמליזם מאלגברה לינארית בעיקר בשימושים הראשונים)

Vector Spaces

מרחב החיצים (dart space) $\mathbb{R}^{E\times\{\pm1\}}$

מרחב הקדקדים (vertex space) $\mathbb{R}^{V}$

מרחב הקשתות (arc space) - תת מרחב המכיל את הווקטורים האנטי-סימטריים תחת rev של מרחב החיצים.

$$\{\alpha : \forall d \ \ \alpha[d] = -\alpha[rev(d)]\}$$

$$\eta(d)[d'] = \begin{cases} 1 & d' = d \\ -1 & d' = rev(d) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

בסיס סטנדרטי של מרחב הקשתות:

$$\{\eta((a,+1)) : a \in A\}$$

$$\eta(S) = \sum_{d\in S} \eta(d)$$

$$\eta(v) = \sum_{d:\, head(d) = v} \eta(d)$$

מרחב החתכים:

$$\vec{\delta}_G(S) = \{d : tail(d) \in S,\ head(d) \notin S\}$$

מרחב החתכים הוא המרחב הנפרש ע"י $\{\eta(\vec{\delta}_G(S)) : S \subset V\}$

יהיו $K_1, \dots, K_{\kappa(G)}$ הרכיבים הקשירים של G.

יהיו $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{\kappa(G)}$ קדקדים נציגים מכל K_i.

נראה ש- $CUT_G = \{\eta(\vec{\delta}_G(v)) : v \in V \setminus \{v_1, \dots v_{\kappa(G)}\}\}$ הוא בסיס של מרחב החתכים.

אינטואיציה:

<u>למה</u> - הוקטורים של CUT_G בת"ל. $\Leftarrow$ $\dim(\mathrm{span}(CUT)) = |CUT|$

<u>הוכחה</u>: יהי $\psi=\sum_v \psi_v \eta(v)$ צירוף לינארי לא טריוויאלי של וקטורים ב-CUT. נראה ש-ψ אינו וקטור האפס.
יהי H תת הגרף של G המושרה ע"י קדקודים עם $\psi_v\neq 0$.
יהי K רכיב קשיר של H. K הוא תת-גרף (ממש) של רכיב כלשהו K' של G משום ש-K אינו מכיל את הנציג $\hat{v}_i$ של K' ($\psi_{\hat{v}_i}=0$).
לכן, קיימת קשת uv לה בדיוק קצה אחד ב-K.
בה"כ $u\in K$. v אינו שייך לרכיב אחר של H, אחרת u ו-v באותו רכיב. נובע ש-$v\notin H$, כלומר $\psi_v=0$. לכן $\psi[uv]\neq 0$.
$\square$

<u>מרחב המעגלים</u> — תת המרחב של מרחב הקשתות הניצב למרחב החתכים:

$$\{\theta : \theta\in \text{Arc space},\ \theta\cdot\eta(v)=0 \quad \forall v\in V\}$$

יהי F יער פורש של G. לכל $e\notin F$ יהי C_e המעגל הבסיסי של e ביחס ל-F. נגדיר $\beta_F(e)=\eta(C_e)$.
נראה שהוקטורים $CYC_F=\{\beta_F(e) : e\in E\setminus F\}$ הם בסיס של מרחב המעגלים.

<u>למה</u>: הוקטורים של CYC_F בת"ל $\Leftarrow$ $\dim(\mathrm{span}(CYC_F))=|CYC_F|$

לכל $e\in E-F$, $\beta(e)$ הוא הוקטור היחיד עבורו הקואורדינטות המתאימות לחיצים של e אינן אפס. לכן $\beta(e)$ אינו יכול להכתב כצירוף לינארי של שאר הוקטורים ב-CYC_F. $\square$

למה - אם W מסלול סגור אז $\eta(W)$ שייך למרחב המעגלים.

הוכחה: יהי $v\in V$. לכל חץ $d\in W$ עם $head(d)=v$, החץ העוקב d' ב-W מקיים $tail(d')=v$. ולהיפך, אם $tail(d)=v$ אז החץ הקודם d' גם מקיים $head(d')=v$. מכאן שמספר החיצים ב-W ש-v בראשם שווה למספר החיצים ב-W שבזנבם v. לכן

$$\eta(v)\cdot\eta(W)=2\left|\{d\in W: head(d)=v\}\right|-2\left|\{d\in W: tail(d)=v\}\right|=0$$

$\square$

תולדה: $\dim(span(CYC_F))\leq\dim($מרחב המעגלים$)$

למה: CUT הוא בסיס של מרחב החתכים.
CYC הוא בסיס של מרחב המעגלים.

הוכחה: מימד מרחב החתכים הוא לפחות $\dim(span(CUT))$
כלומר $x+|CUT| = x+|V|-\kappa(G)$ עבור שלם אי-שלילי x.
מימד מרחב המעגלים הוא לפחות $\dim(span(CYC_F))$
כלומר $y+|CYC_F| = y+|E|-|F|$

מימד מרחב הקשתות $|E|$ הוא סכום מימדי תתי המרחבים הניצבים אלו:

$$\begin{aligned}|E| &= x+|V|-\kappa(G)+y+|E|-|F|\\ &= x+|V|-\kappa(G)+y+|E|-(|V|-\kappa(G))\\ &= x+y+|E|\end{aligned}$$

כלומר $x=y=0$ ומכאן ש-CUT הוא בסיס למרחב החתכים
ו-CYC בסיס למרחב הקשתות.

$\square$

אינטואיציה:
$\eta(v)$ במרחב החתכים
$\eta(f)$ הוא מסלול סגור

Cut-Cycle duality

<u>למה</u> - יהי G גרף מישורי. v קודקוד של G ו-f קודקוד של G^*.

$$\eta(v)\cdot\eta(f)=0$$

<u>הוכחה</u>: תהי D^+ קבוצת החיצים של f שראשם v
תהי D^- 〃 〃 〃 ' שזנבם v

$$\eta(v)\cdot\eta(f)=2|D^+|-2|D^-|$$

כעת, אם $d\in D^+$ אז $\pi^*(d)=rev\circ\pi(d)$ כלומר $\pi^*(d)\in D^-$
אם $d\in D^-$ אז $\pi^{*-1}(d)\in D^+$
כלומר, $|D^+|=|D^-|$ □

<u>משפט</u> (דואליות של מרחב החתכים ומרחב המעגלים):
מרחב החתכים של G^* הוא מרחב המעגלים של G.

<u>הוכחה</u>: בה״כ G קשיר. בסיס למרחב החתכים של G הוא:

$$\{\eta(v): v\in V\setminus v_\infty\}$$

בסיס למרחב החתכים של G^* הוא

$$\{\eta(f): f\in V(G^*)-f_\infty\}$$

מהלמה הקודמת, הוקטורים במרחבים אלו אורתוגונליים אחד לשני.
לכן מרחב החתכים של G^* הוא תת-מרחב של מרחב המעגלים של G.
מספר הוקטורים בבסיס למרחב החתכים של G^* הוא

$$|\phi|-1 = m-n+2-1 = |E|-(|V|-1)$$

כלומר, זהה לממד מרחב המעגלים של G, מכאן שהמרחבים זהים
□

Interdigitating Trees

יהי F יער פורש. תהי $e\in F$. יהי K הרכיב הקשיר של F שמכיל את e. יהיו K_1 ו-K_2 הרכיבים הקשירים המתקבלים מ-K כשמוחקים את e, כאשר $\mathrm{tail}(e)\in K_1$.

קבוצת החיצים עם זנב ב-K_1 וראש ב-K_2 נקראת החתך הבסיסי של e ביחס ל-F.

<u>למה</u>: $\{\eta(\text{החתך הבסיסי של } e \text{ ביחס ל-} F) : e\in F\}$ היא בסיס למרחב החתכים.

הוכחה: ברור ששייכים למרחב החתכים. הוקטורים בקבוצה בת"ל כי לכל $e\in F$ החיצים של e נמצאים בדיוק בוקטור אחד בקבוצה. מספר הוקטורים הוא $|V(G)|-\kappa(G)$, כלומר כמימד מרחב החתכים.
$\square$

<u>למה</u> - יהי G גרף מישורי קשיר. יהי T עץ פורש של G. כל מעגל ב-G^* מכיל קשת של T.

<u>הוכחה</u> - יהי C^* מעגל ב-G^*. מכיוון ש-$\eta(C^*)$ במרחב המעגלים של G^* הוא במרחב החתכים של G. לכן ניתן לכתוב אותו כצירוף לינארי:

$$\eta(C^*)=\sum_{e\in T}\alpha_e\,\eta(\text{החתך הבסיסי של } e)$$

מכיוון שצד שמאל אינו אפס, קיימת לפחות קשת אחת $\hat{e}\in T$ עבורה $\alpha_{\hat{e}}\neq 0$. מכיוון ש-$\hat{e}$ מופיעה רק בחתך הבסיסי של $\hat{e}$, המקדם של החיצים של $\hat{e}$ ב-$\eta(C^*)$ שונה מאפס, כלומר $\hat{e}\in C^*$.
$\square$

<u>משפט</u> - הקשתות של G שאינן ב-T מהוות עץ פורש T^* של G^*.

<u>הוכחה</u>: מספר הקשתות שאינן ב-T הוא $|E|-|V|+1=|V(G^*)|-1$. הקשתות אינן יוצרות מעגל ב-G^* עפ"י הלמה הקודמת. $\square$

Simple cut-cycle duality

<u>למה</u> - יהי G גרף מישורי, T עץ פורש, $\hat{e}\in T$.
קבוצת החיצים של החתך הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T ב-G זרה
לקבוצת החיצים של המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T^* ב-G^*.

הוכחה: יהי C^* המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T^* ב-G^*.
נכתוב את $\eta(C^*)$ בבסיס של מרחב החתכים של G

$$\eta(C^*)=\sum_{e\in T}\alpha_e\,\eta(\text{חתך בסיסי של } e)$$

לכל $e\in T$, אם $\alpha_e\neq 0$ אז $\eta(C^*)$ אינה אפס על החיצים של e.
אבל הקשת היחידה של C^* ב-T היא $\hat{e}$. לכן

$$\eta(C^*)=\alpha_{\hat{e}}\,\eta(\text{חתך בסיסי של } \hat{e})$$

כיוון שהחץ $(\hat{e},1)$ מופיע עם מקדם $+1$ גם ב-C^* וגם ב-$\eta(\text{חתך בסיסי של } \hat{e})$
נובע ש $\alpha_{\hat{e}}=1$! $\eta(C^*)=\eta(\text{חתך בסיסי של } \hat{e})$

$\square$

<u>משפט</u> - קבוצת חיצים מהווה מעגל פשוט ב-G^* אמם היא מהווה חתך פשוט ב-G.

הוכחה: $\Longleftarrow$ יהי C^* מעגל פשוט ב-G^*, תהי $\hat{e}$ קשת של C^*, ונכתוב
$C^*=P^*\circ\hat{e}$. יהי T^* עץ פורש של G^* שמכיל את P^*.
C^* הוא המעגל הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T^*, ולפי הלמה הקודמת החיצים
של C^* מהווים את החתך הבסיסי של $\hat{e}$ ביחס ל-T, שהוא חתך
פשוט.

$\Longrightarrow$ תהי S_1 קבוצת קדקודים של G כך ש $\vec{\delta}_G(S_1)$ הוא חתך פשוט.
תהי $S_2=V(G)\setminus S_1$. יהיו T_i עצים הפורשים בבנין את S_i.
תהי $e\in\delta(S_1)$ ויהי $T=T_1\cup T_2\cup\{e\}$. אז $\vec{\delta}_G(S_1)$ הוא חתך
בסיסי ביחס ל-T, ולכן מעגל בסיסי (ולכן פשוט) ב-G^*. $\square$