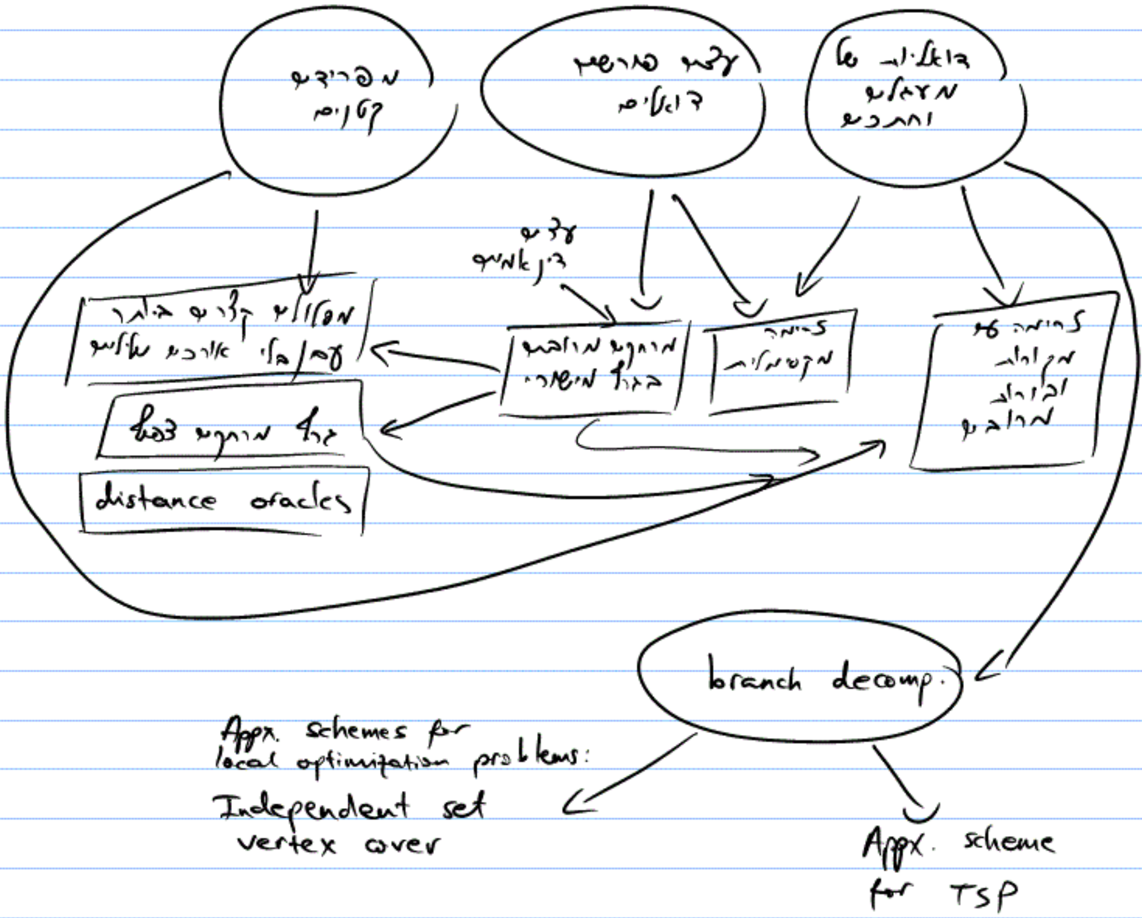
Note Title

אלגוריתמים לגרפים מישוריים - שיעור I



Sparsity

דוגמה לניצול תכונה מבנית: דלילות sparsity

משפחה של גרפים נקראת דלילה (sparse) אם לכל גרף G במשפחה

$|E(G)| \le C\cdot|V(G)|$ עבור קבוע כלשהו C.

קשתות מקבילות נספרות כקשת אחת

(בתרגיל תוכיחו שגרפים מישוריים הם דלילים)

נתון: גרף G דליל תחת מחיקת קדקדים וכיווץ קשתות
משקולות לקשתות

רצוי: עץ פורש מינימלי MST

זמן ריצה רצוי: $O(n)$

האלגוריתמים שלמדנו בעבר רצים ב- $O(n\log n)$
(משתמשים ב- heap)

רמז: (1) אם v קדקד של G ו- e קשת בעלת משקל מינימלי שחלה על v, קיים MST שכולל את e.

(2) אם e קשת ב-MST כלשהו ו- T הוא MST בגרף שמתקבל מ G כשמכווצים את e אז $T \cup \{e\}$ הוא MST של G.

רוצים לייצג את הגרף (רשימת שכנויות, linked list)

MST in sparse graphs

<u>למה</u>: בגרף דליל קיים קדקד שדרגתו לכל היותר 2c.

<u>הוכחה</u>: נניח שלא. אזי $2|E| = \sum_{v \in V} deg(v) \geq 2c \cdot |V|$
$\iff |E| \geq c \cdot |V|$
בסתירה לדלילות.
$\square$

<u>אלגוריתם</u>:

- לכל קדקד שמור דרגתו
- שמור רשימה של קדקדים שדרגתם לא יותר מ- 2c
- כל עוד הרשימה אינה ריקה
  - בחר קדקד u מהרשימה
  - תהי uv הקשת בעלת משקל מינימלי שיוצאת של u
  - הוסף את u ל MST
  - כווץ את uv (אחד את הרשימות של u ו- v!
    מחק את uv מרשימת השכנות
    מחק לולאות וקשתות מקבילות
    עדכן הדרגה של הקדקד המכווץ)

<u>נכונות</u>: מ״י: מהמשפט ברמ״ס

<u>זמן ריצה</u>: בכל שלב נוספת קשת אחת ל T
$\Leftarrow$ מספר האיטרציות $n-1$

מספר הפעולות המבוצעות בכל שלב הוא $O(1)$
כי u בעל דרגה לכל היותר 2c.

לכן זמן הריצה הוא $O((n-1)c) = O(n)$

Basics

נגדיר מחדש מהו גרף. ההגדרה שלנו תהיה מבוססת קשתות.

יש לפחות שלוש דרכים לפרש גרפים:

- גרף לא מכוון (edges)
- גרף מכוון (arcs)
- גרף דו כיווני (darts)

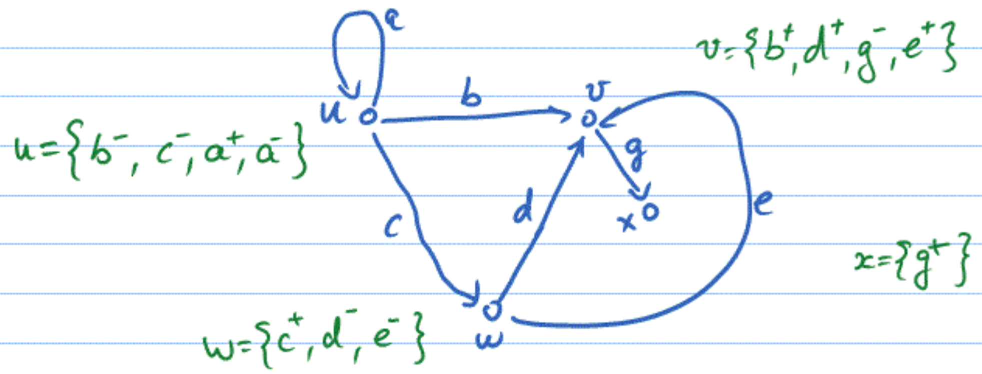
כל גרף הוא גרף מכוון, אבל לעיתים נוח להתעלם מהכיווניות.

תהי: A קבוצה סופית (קבוצת הקשתות arcs)
קבוצת החיצים (darts) היא $A \times \{+1,-1\}$.
החץ $(a,1)$ (או a^+) בדרך כלל מזוהה עם הקשת a.

גרף G הוא זוג (V,A), כאשר V הוא חלוקה (partition) של קבוצת החיצים D.
[כל חלק של החלוקה V מייצג קדקוד, שמוגדר ע"י החיצים שנכנסים אליו]

הראש של הקשת a הוא הקדקוד $v \in V$ שאליו שייך החץ $(a,1)$
הזנב של a הוא הקדקוד v שאליו שייך החץ $(a,-1)$

לעיתים נסמן קשת ע"י קצותיה: $a = uv$
$\mathrm{tail}(a) = u$ $\mathrm{head}(a) = v$



הערה: ההגדרה שלנו אינה מאפשרת קדקדים מבודדים.

לכל $d=(a,\sigma)$ $a\in A, \sigma\in\{\pm1\}$ נגדיר העתקה חד-חד ערכית ועל (bijection)

$$rev(d)=(a,-\sigma)$$

הגרף המתקבל מ-(V,A) ע"י מחיקת קבוצת קשתות A' הוא $(V', A\setminus A')$ כאשר V' הוא הצמצום (restriction) של V לחיצים של $A\setminus A'$.

הגרף המתקבל מ-(V,A) ע"י כיווץ הקשת $uv\in A$ הוא (V',A') כאשר $A'=A\setminus\{uv\}$, והחלקים u,v של V מאוחדים (החיצים של הקשת uv אינם נכללים)

- פעולת הכיווץ אינה מוגדרת עבור לולאות
- כדאי לחשוב על כיווץ כעל הפעולה שמקצרת קשת עד שקצותיה נפגשים.

שיכונים (Embeddings)

שימושי להוכחות וגם לייצוג במחשב.

שיכון גיאומטרי הוא (לא פורמלית) ציור של גרף
ניתן לתאר שיכונים גם בצורה קומבינטורית (rotation system)

שיכון של $G=(V,A)$ הוא תמורה (permutation) π על קבוצת החיצים $A\times\{+1,-1\}$ שהמסלולים שלה (orbits) הם בדיוק החלקים (קדקדים) בחלוקה V.

[π מציינת, לכל קדקד v, את החיצים הנכנסים ל-v מסודרים נגד כיוון השעון.]

Basics 3

גרף משטח הוא זוג $G=(\pi,A)$ (יסומן גם G_π)

נגדיר פרמוטציה דואלית: $\pi^* = rev \circ \pi$

הרכבה פונקציונלית

הפאות (faces) של $G=(\pi,A)$ הם המחזורים של π^*

[באופן גיאומטרי הפאות של G מוגדרות כרכיבים הקשירים של קבוצת הנקודות שאינן משויכות לקודקוד או לקשת.]

הגרף הדואלי הוא הגרף המשטח $G^*=(\pi^*,A)$

<u>למה</u>: $(G^*)^* = G$

<u>הוכחה</u>: $(\pi^*)^* = (rev \circ (rev \circ \pi)) = \pi$ $\square$

[illegible]:

למה - הוקטורים של CUT_G בת״ל. $\Leftarrow$ $\dim(\mathrm{Span}(CUT)) = |CUT|$

הוכחה: יהי $\psi=\sum_v \psi_v \eta(v)$ צירוף ליניארי לא טריוויאלי של וקטורים ב- CUT. נראה ש-ψ אינו וקטור האפס.
יהי H תת הגרף של G המושרה ע״י קדקודים עם $\psi_v \neq 0$.
יהי K רכיב קשיר של H. K הוא תת-גרף (ממש) של רכיב כלשהו K' של G משום ש K אינו מכיל את הנציג $\hat{v}_i$ של K' ($\psi_{\hat{v}_i}=0$).
לכן, קיימת קשת uv לה בדיוק קצה אחד ב- K.
בה״כ $u\in K$. v אינו שייך לרכיב אחר של H, אחרת u ו- v באותו רכיב. נובע ש $v\notin H$, כלומר $\psi_v=0$. לכן $\psi[uv]\neq 0$.
□

מרחב המעגלים – תת המרחב של מרחב הקשתות הניצב למרחב החתכים:

$$\{\theta : \theta\in \text{Arc space},\ \theta\cdot\eta(v)=0\ \ \forall v\in V\}$$

יהי F יער פורש של G. לכל $e\notin F$ יהי C_e המעגל הבסיסי של e ביחס ל- F. נגדיר $\beta_F(e)=\eta(C_e)$.
נראה שהוקטורים $CYC_F=\{\beta_F(e) : e\in E\setminus F\}$ הם בסיס של מרחב המעגלים.

למה: הוקטורים של CYC_F בת״ל $\Leftarrow$ $\dim(\mathrm{Span}(CYC_F))=|CYC_F|$

לכל $e\in E-F$, $\beta(e)$ הוא הוקטור היחיד עבורו הקואורדינטה המתאימה לחיצים של e אינן אפס. לכן $\beta(e)$ אינו יכול להכתב כצירוף ליניארי של שאר הוקטורים ב-CYC_F. □